# Lyžovanie na svahu

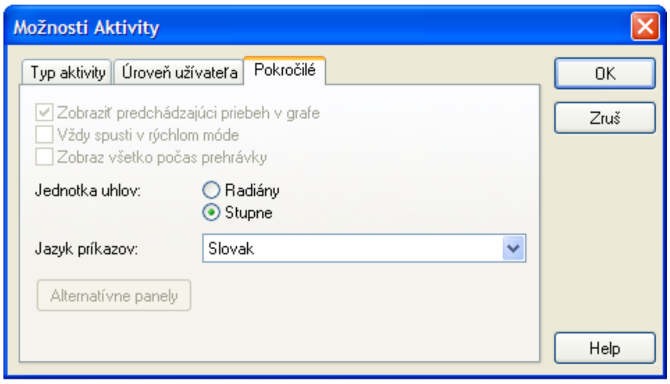
## Úloha

Namodelovať situáciu, keď sa lyžiar spúšťa po svahoch s rôznym sklonom, ak berieme do úvahy

a) len tiažovú silu
b) tiažovú a treciu silu
c) tiažovú, treciu a odporovú silu

## Predpoklady modelu

– uhol budeme zadávať v stupňoch, preto je potrebné na začiatku modelovania pri výbere aktivity prepnúť prednastavené radiány na stupne




– použité parametre :

$\alpha = 15°; 30°; 45°$

$m_{lyžiara} = 75\ kg$

$f = 0{,}05$

$\varrho_{vzduchu} = 1{,}3\ kg.m^{-3}$

$S = 0{,}3\ m^2$

$C = 0{,}3$

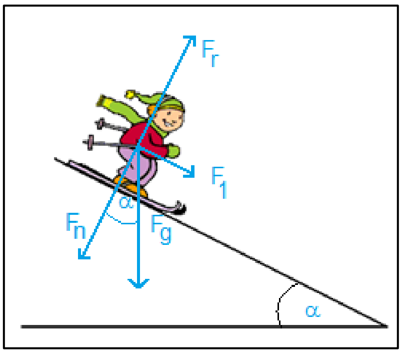
## Fyzikálne vysvetlenie modelu a vzorové výsledky

## Pohyb po naklonenej rovine

Lyžiara pohybujúceho sa dole svahom uvádza do pohybu pohybová zložka tiažovej sily $F_1$ (obr.1). Za predpokladu, že zanedbávame treciu a odporovú silu, bude mať výsledná sila F pôsobiaca na lyžiara práve veľkosť pohybovej zložky tiažovej sily

$F = F_1 = m.g.\sin\alpha$

Obr.1




Využitím vzťahu $a = \frac{F}{m}$ z druhého Newtonovho zákona, môžeme určiť zrýchlenie lyžiara. Zrýchlenie bude pre tento prípad konštantné, pretože ani výsledná sila sa s časom nemení. Následne určíme rýchlosť lyžiara a dráhu, ktorú prekonal. Samozrejme môžeme použiť všeobecne známe rovnice pre rovnomerne zrýchlený pohyb, využime však metódu dynamického modelovania, aby sme sa pripravili aj na situáciu, keď zrýchlenie už v čase konštantné nebude. Podľa tejto metódy určíme rýchlosť lyžiara v danom časovom okamihu podľa vzťahu

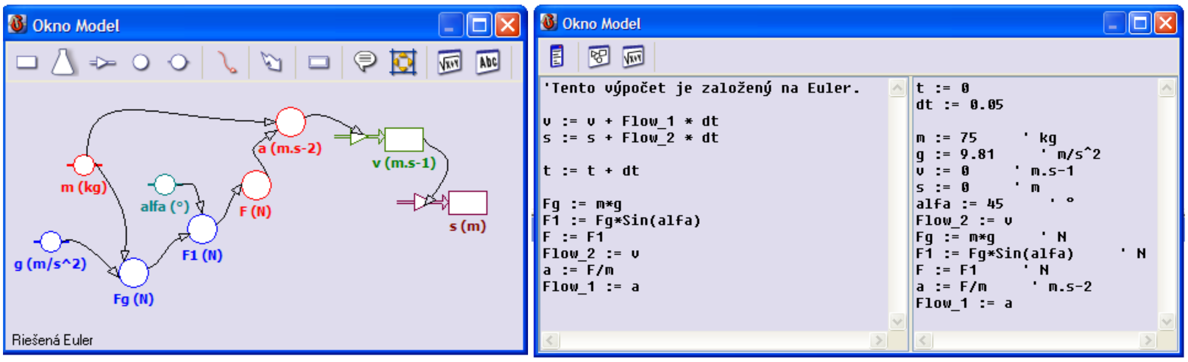
$$v(t + dt) = v(t) + a.dt$$

a z toho následne dráhu, ktorú lyžiar prekonal v danom časovom okamihu

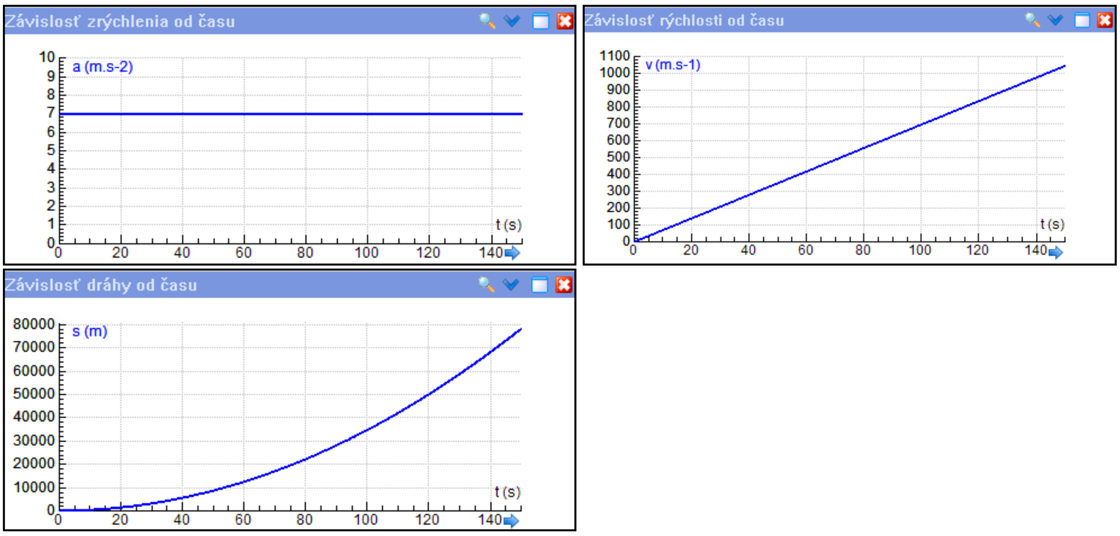
$$s(t + dt) = s(t) + v.dt\ .$$

Využitím týchto poznatkov vytvoríme model lyžiara na svahu (obr.2) a vynesieme grafy závislostí zrýchlenia, rýchlosti a dráhy, ktorú lyžiar prešiel od času (obr.3).

Obr.2

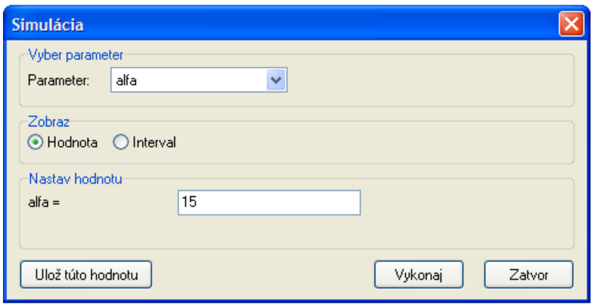


Obr.3

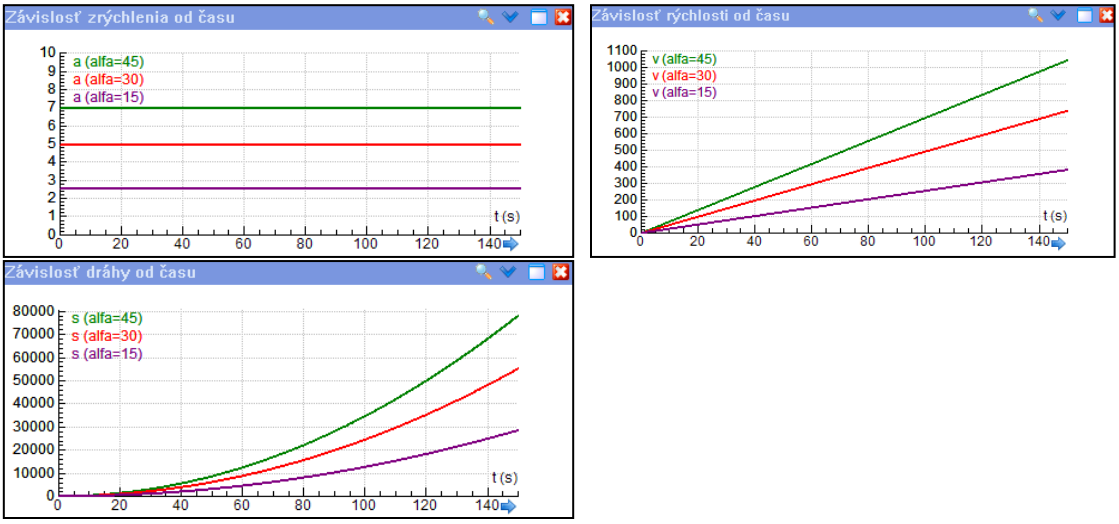



Ako vplýva sklon svahu na danú situáciu zistíme pomocou funkcie simulácia (obr.4), kde ako parameter vyberieme uhol sklonu alfa a zadáme hodnoty 15°,30°a 45°(obr.5).

Obr.4




Obr.5



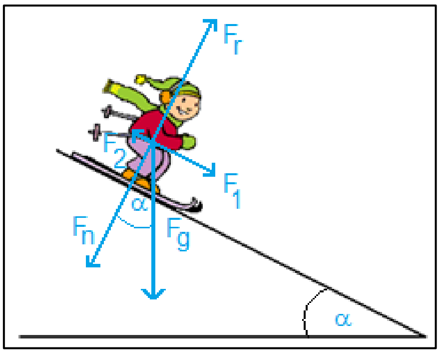

Vidíme, že čím väčší je sklon svahu tým je aj pohyb lyžiara rýchlejší. Už na prvý pohľad je ale zrejmé, že zanedbaním ostatných síl sme model situácie príliš zjednodušili, pretože sa nezhoduje s reálnymi skúsenosťami. Podľa tohto modelu by lyžiar už po pár sekundách prekročil aj rýchlosť zvuku čo na svahoch nepozorujeme.

**Korekcia vzhľadom na treciu silu**

Zarátajme do modelu treciu silu $F_2$ (obr.6). Na naklonenej rovine veľkosť trecej sily vypočítame podľa rovnice

$$F_2 = f.F_g.\cos\alpha = f.m.g.\cos\alpha$$

Obr.6

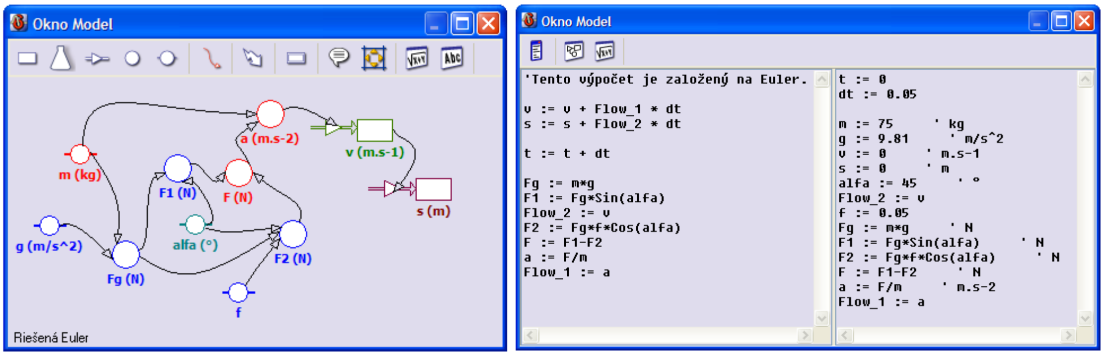



Výsledná sila pôsobiaca na lyžiara v smere jeho pohybu určíme podľa vzorca

$$F = F_1 - F_2\ ,$$

znamienko mínus je dôsledok toho, že trecia sila pôsobí proti pohybu lyžiara. Výsledná sila je v čase stále konštantná. Do modelu doplníme predpis pre treciu silu. Rýchlosť a dráha lyžiara sa automaticky upraví podľa aktuálnej výslednej sily. Nový model (obr.7) nám poskytne nové hodnoty závislostí zrýchlenia, rýchlosti a dráhy lyžiara od času (obr.8).

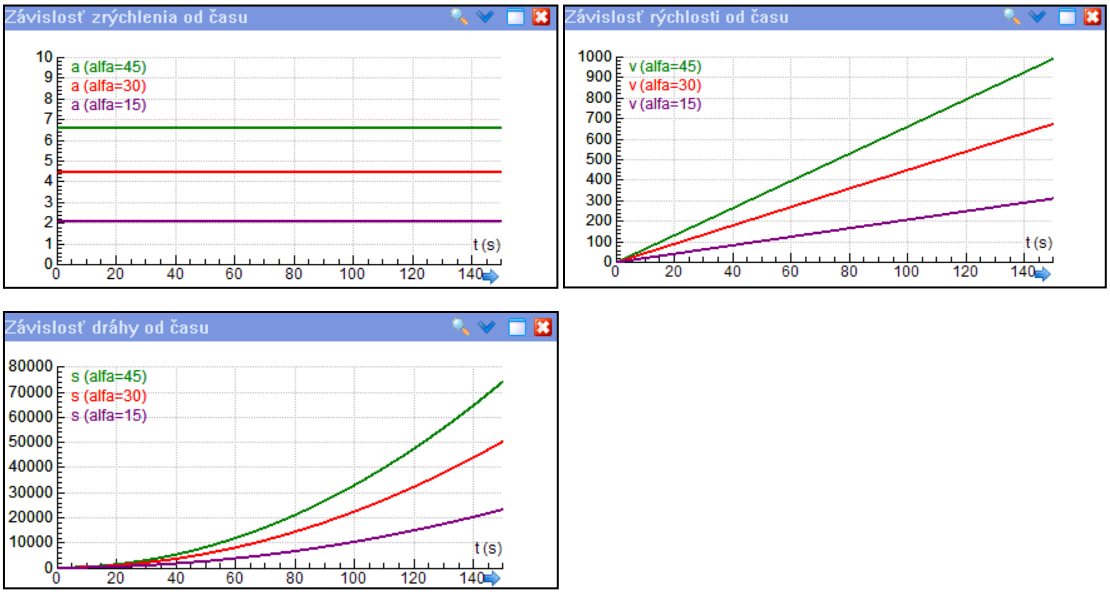
Obr.7



Obr.8

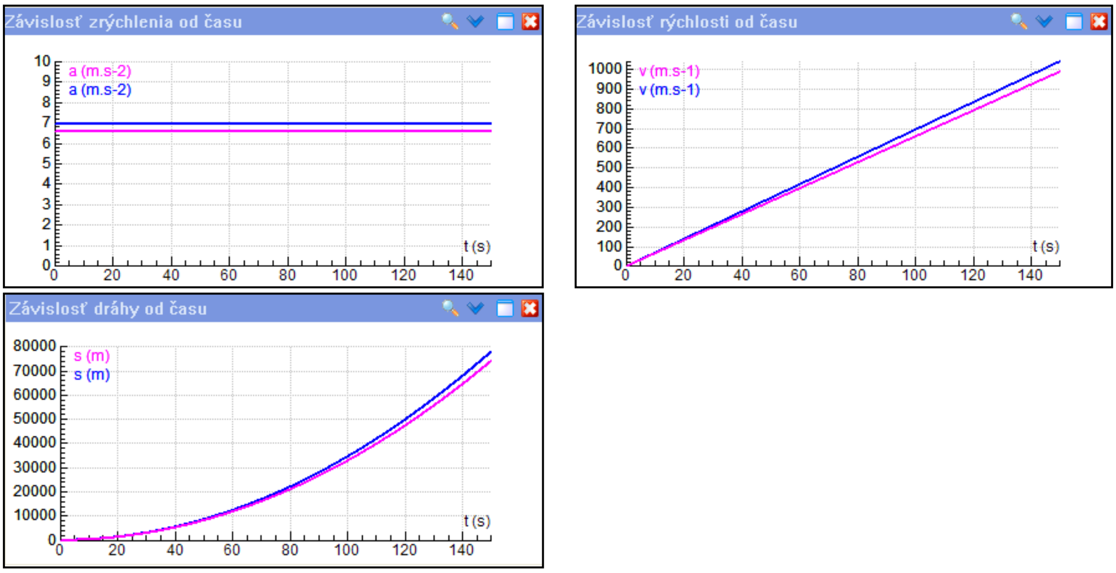

Podobne ako v prvom prípade, aj teraz použijeme simuláciu aby sme nastavili rôzny sklon lyžiarskeho svahu a zobrazili dané závislosti (obr.9).

Obr.9




Ak porovnáme výsledky z predchádzajúceho modelu a upraveného modelu (obr.10) zistíme, že táto korekcia nám nepriniesla požadované priblíženie sa k reálnej situácii. Hodnota rýchlosti v čase naďalej prudko stúpa a nepodáva tak výsledky, aké by sme očakávali.

Obr.10



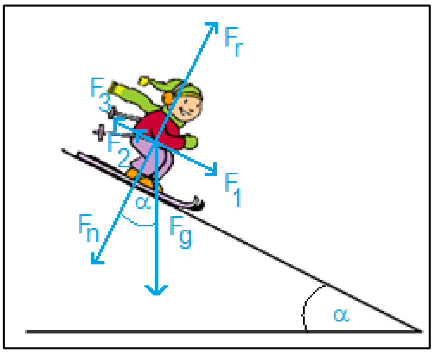

**Korekcia vzhľadom na odporovú silu**

Upravme model pridaním odporovej sily $F_3$ (obr.11), ktorá má smer proti pohybu lyžiara a je vyjadrená rovnicou

$$F_3 = \frac{1}{2} C.S.\rho.v^2 \ .$$

Odporová sila sa zväčšuje so štvorcom rýchlosti, ktorú lyžiar dosahuje. Môžeme predpokladať, že pohyb lyžiara bude brzdený viac práve odporovou silou ako silou trecou, ktorá je vďaka nízkemu koeficientu šmykového trenia takmer zanedbateľná.

Obr.11

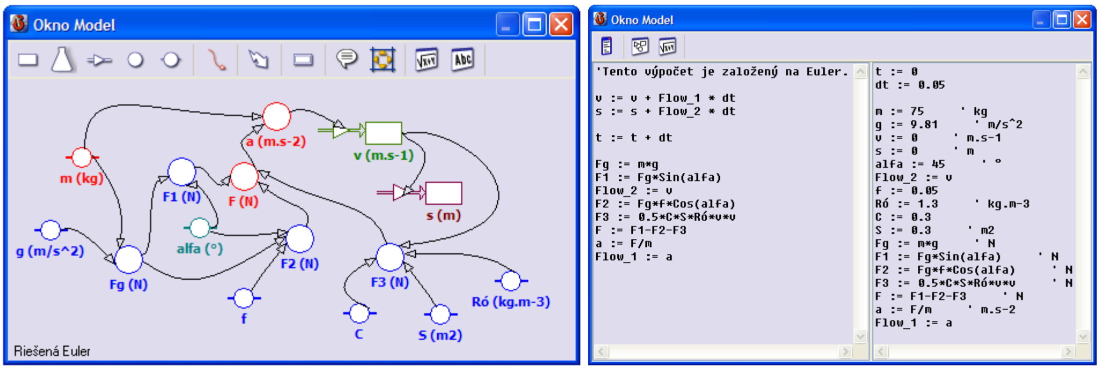



Výpočet výslednej sily pôsobiacej na lyžiara je teraz daný vzorcom

$$F = F_1 - F_2 - F_3.$$

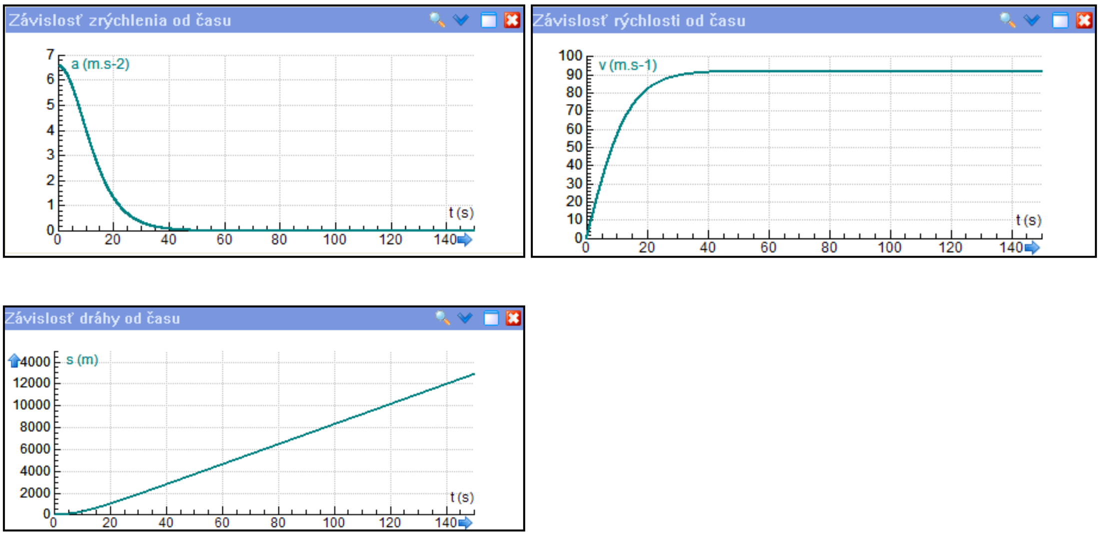
Dostali sme sa do situácie, keď už výsledná sila nie je v čase konštantná. Tu už iný ako dynamický model použiť nemôžeme. Doplníme predpis pre odporovú silu, ktorá ovplyvní veľkosť výslednej sily. Výsledky takto upraveného modelu (obr.12) vystihujú situáciu na svahu s malými odchýlkami od reálnych výsledkov.

Obr.12



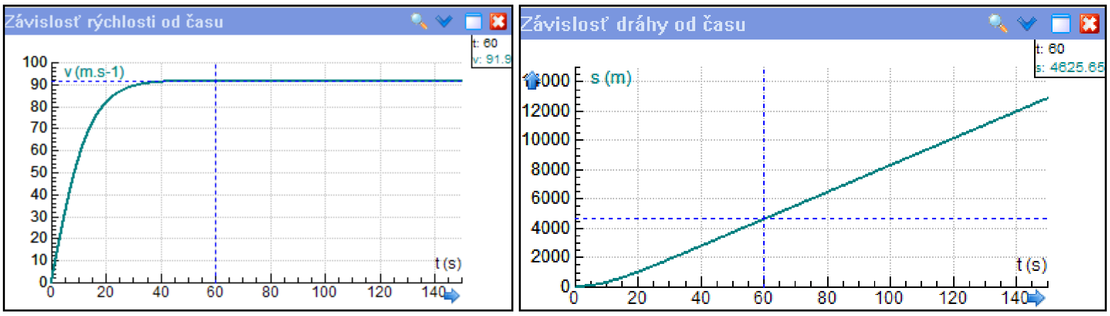

Vynesením grafických závislostí parametrov pohybu od času (obr.13) získavame krivky, ktoré nie sú na prvý pohľad zrejmé a vznikajú kombináciou viacerých aspektov. Všimnime si tiež, že ako náhle dôjde k vyrovnaniu odporovej sily a rozdielu pohybovej zložky tiažovej sily a trecej sily, lyžiar sa začína pohybovať rovnomerným pohybom.

Obr.13




Už po jednej minúte na svahu lyžiar dosiahne stálu rýchlosť 91,9 $m.s^{-1}$. Aj táto rýchlosť je samozrejme vysoká, uvedomme si však, že dráha, na ktorej by túto rýchlosť dosiahol, by musela byť dlhá aspoň 4,63 *km* a lyžiar by musel ísť po zjazdovke so sklonom 45° priamo dole (obr.14). Dôležité na tomto modeli ale je, že sa rýchlosť lyžiara nebude s časom stále zväčšovať, ale sa postupne ustáli na nejakej hodnote.

Obr.14




Simuláciou pre rôzne sklony svahu (obr.15) dostávame výsledky, z ktorých vidieť vzťah medzi sklonom svahu a veľkosťou zrýchlenia a následne aj rýchlosti a dráhy prekonanej lyžiarom.

Obr.15